ОЧЕРКЪ НАУЧНОЙ ДѢЯТЕЛЬНОСТИ И. П. ДОЛБНИ.

Д. Д. Мордухай-Болтовского.

Большинство работъ покойнаго И. П. Долбни относится къ теоріи эллиптическихъ функцій и къ теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Изъ русскихъ математиковъ онъ первый отстаивалъ въ своихъ работахъ преимущество Вейерштрассовыхъ функцій $\wp u$, ζu, σu, т.-е. функцій, получаемыхъ обращеніемъ интеграла

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

передъ Якобіевскими snx, cnx, dnx, употреблявшимися Сомовымъ, Покровскимъ и другими.

Поэтому работы его находятся въ близкой связи съ трудомъ Halphen'а [1]), представляющимъ наиболѣе полное изслѣдованіе этихъ функцій.

Но эллиптическія функціи интересовали И. П. Долбню, не какъ цѣль, а скорѣе, какъ средство для рѣшенія вопроса объ интегрируемости въ конечномъ видѣ и, вообще, приведенія Абелевыхъ интеграловъ къ низшимъ трансцендентнымъ.

Научное наслѣдство И. П. Долбни состоитъ изъ большого числа небольшихъ статей и замѣтокъ, преимущественно на французскомъ языкѣ, главнымъ образомъ въ Bulletin de Dar-

[1]) *Halphen.* Traité des fonctions élliptiques.

boux. Эти статьи и замѣтки касаются часто довольно частныхъ вопросовъ.

Перечисленіе полученныхъ результатовъ можетъ ввести читателя въ заблужденіе; нѣкоторые результаты носятъ столь частный характеръ, что могутъ быть сочтены не за имѣющіе научное значеніе результаты, а за отвѣты на поставленныя авторомъ, можетъ быть порой и замысловатыя задачи. Чтобы вѣрно судить о заслугахъ покойнаго, слѣдуетъ прочесть какую-либо изъ работъ его отъ начала до конца. Тогда нетрудно усмотрѣть тѣ общія идеи, которыя авторъ осуществляетъ порой можетъ быть и въ весьма частныхъ формахъ.

И. П. Долбня относился весьма скептически къ новѣйшему направленію въ математикѣ, изслѣдованій общаго характера онъ боялся, какъ грозящихъ привести его къ той «фельетонной математикѣ», которую онъ видѣлъ даже у наиболѣе крупныхъ модныхъ математиковъ. Знакомить съ методами слѣдуетъ на такихъ примѣрахъ, которые могутъ быть доведены до конца, не стараясь его примѣнять тамъ, гдѣ вмѣсто законченныхъ численныхъ результатовъ мы будемъ имѣть только слова.

Будучи педагогомъ по призванію, И. П. Долбня и въ наукѣ предпочиталъ идти тѣмъ путемъ, какимъ ведетъ хорошій учитель своихъ учениковъ, онъ предпочиталъ идти отъ частнаго къ общему. Вотъ почему его изслѣдованія имѣютъ сравнительно мало точекъ соприкосновенія съ работами Кенигсбергера, Пикара, Пуанкарэ и моими [1]), гдѣ путь идетъ, наоборотъ отъ общаго къ частному.

Чтеніе работъ И. П. Долбни доставляетъ истинное удовольствіе вслѣдствіе особенной ясности изложенія и, такъ сказать, ихъ отшлифованности. Въ читателѣ они возбуждаютъ то чувство, которое скорѣе всего можетъ быть названо эстетическимъ чувствомъ изящнаго.

---

[1]) *Д. Мордухай-Болтовской.* О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ низшимъ трансцендентнымъ. Извѣстія Варш. Полит. Инст. за 1905—1906 года.

Чтобы въ нѣсколькихъ словахъ составить себѣ понятіе объ основной идеѣ, лежащей въ основѣ изслѣдованій И. П. Долбни, относящихся къ интегрированію въ конечномъ видѣ обратимся къ первой главѣ интегральнаго исчисленія: къ интегрированію функцій, которая представляетъ не что иное, какъ теорію интегрированія въ конечномъ видѣ функцій съ помощью, такъ сказать, случайныхъ методъ. Общимъ правиломъ является — приведеніе интегрированія трансцендентной функціи къ Абелеву интегралу. Такъ $\int F(\sin x,\ \cos x)\ dx$, гдѣ F раціональная функція отъ $\sin x$, $\cos x$ подстановкой $tg\,\frac{x}{2}=z$ приводимъ къ интегралу отъ раціональной функціи.

Точно такимъ же образомъ $\int F(e^{\alpha x})\ dx$, гдѣ F алгебраическая функція, подстановкой $e^{\alpha x}=z$ приводимъ къ Абелеву интегралу.

Это общее правило. Но въ иныхъ случаяхъ удобнѣе измѣнить этому общему правилу, удобнѣе идти обратнымъ путемъ, нахожденіе Абелевыхъ интеграловъ приводить къ нахожденію интеграловъ отъ нѣкоторыхъ трансцендентныхъ перваго класса.

Такъ интегралъ

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)^m}}$$

удобно подстановкой

$$x=\sin\varphi\ ,\ dx=\cos\varphi\ d\varphi$$

приводить къ интегралу

$$\int\frac{\sin^n\varphi d\varphi}{\cos^m\varphi}$$

и въ окончательномъ результатѣ замѣнять $\sin\varphi$ черезъ x.

Въ этомъ примѣрѣ мы свели Абелевъ интегралъ къ интегралу отъ тригонометрической функціи.

Естественно ожидать, что въ иныхъ случаяхъ ту же услугу могутъ оказать и эллиптическія функціи.

Если область основныхъ трансцендентныхъ расширить введеніемъ Якобіевскихъ тета-функцій $\Theta(u)$, $H(u)$, то выразимъ въ конечномъ видѣ

$$\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{R(x)}}\ , \int \frac{x^2dx}{(1-n^2x^2)\sqrt{R(x)}}$$

$R(x)=(1-x^2)\ (1-k^2x^2)$, а затѣмъ и всякій эллиптическій интегралъ, не выражаемый вообще въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ. Случай выражаемости съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ это тотъ случай, когда изъ получаемаго выраженія могутъ быть исключены тета-функціи. Такимъ образомъ поступаетъ Золотаревъ [1]), по идеямъ Вейерштрасса [2]), изслѣдуя выражаемость Чебышевскаго эллиптическаго интеграла

$$I=\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{1}$$

$$R(x)=x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

или, что тоже согласно изслѣдованіямъ Чебышева, выражаемость этого интеграла съ помощью одного логариѳма:

$$\frac{1}{\lambda}\, lg(P+Q\sqrt{R})$$

(λ цѣлое число).

Подстановкой

$$x=\frac{\operatorname{sn}^2(u,k)}{\operatorname{sn}^2(u,k)-\operatorname{sn}^2(a,k)} \tag{2}$$

$$k^2=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-1}{\beta-1}\ ;1\operatorname{sn}^2a=\frac{\beta-1}{\beta} \tag{3}$$

---

1) *Е. Золотаревъ.* Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ стр. 124, или: Sur la méthode de M. Tchebychef, Journ. de Liouville (2) t. 19.

2) *Weierstrass.* Werke B. I. S. 223.

онъ получаетъ

$$\int_0^x \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = -2\left[\frac{(A+1)\,cna\,dna}{\operatorname{sn}a} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right] u$$

$$+\,lg\,\frac{H(a-u)}{H(a+u)} \tag{4}$$

откуда получаетъ *траснцендентное* условіе выражаемости въ конечномъ видѣ I

$$a \equiv \frac{\nu K + \nu' k'_i}{\lambda} \tag{5}$$

гдѣ ν, ν' цѣлыя числа.

Золотаревъ доказываетъ, что можно ограничиться случаемъ, когда λ нечетное число.

Условіе (5) сводится тогда къ слѣдующему.

Полагая $a_j = 2^j a$
получаемъ двойной рядъ

$$\begin{array}{l} cn^2a,\ cn^2a_1,\ cn^2a_2 \ldots\ cn^2a_j \ldots \\ dn^2a,\ dn^2a_1,\ dn^2a_2 \ldots\ dn^2a_j \ldots \end{array} \tag{6}$$

Періодичность этого ряда и будетъ необходимымъ и достаточнымъ условіемъ интегрируемости.

При этомъ въ случаѣ выполнимости этого послѣдняго условія можно найти и законченное выраженіе для I.
А именно для этого только слѣдуетъ преобразовать $\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R(x)}}$ къ новому независимому перемѣнному x_1, полагая

$$x_1 = \frac{\operatorname{sn}^2(u_1, k)}{\operatorname{sn}^2(u_1, k) - \operatorname{sn}^2(a_1, k)} \tag{7}$$

гдѣ

$$u_1 = 2u,$$

что даетъ приведеніе $\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R(x)}}$ съ помощью логариѳма къ

$\int\frac{(x_1+A_1)dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$. Такимъ же образомъ приводимъ $\int\frac{(x_1+A_1)dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$ къ $\int\frac{(x_2+A_2)dx_2}{\sqrt{R_2(x_2)}}$ и т. д.

Если теперь ρ рѣшеніе сравненія

$$2^{\rho}\equiv 1\ (mod\lambda) \tag{8}$$

будемъ имѣть $x_\rho=x$, $a_\rho=a$, $A_\rho=A$ и приведеніе $\int\frac{x+A}{\sqrt{R(x)}}dx$ къ $\int\frac{x_\rho+A_\rho}{\sqrt{R_\rho(x_\rho)}}dx_\rho$ сведется къ уравненію, опредѣляющему

$$\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Именно изъ этой послѣдней методы выводится *дополненіе* къ извѣстной методѣ Абеля опредѣленія въ конечномъ видѣ интеграла $\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R(x)}}$.

Какъ извѣстно Абель ставитъ эту задачу въ связь съ разложеніемъ $\sqrt{R(x)}$ въ непрерывную дробь.

А именно, онъ доказываетъ, что необходимо и достаточнымъ условіемъ выражаемости интеграла J въ конечномъ видѣ является періодичность этой непрерывной дроби. И. П. Долбня въ одной изъ своихъ работъ (2) даетъ простое доказательство этой основной теоремы Абеля.

Но теорема Абеля дастъ возможность прійти къ категорическому отрицательному отвѣту относительно невыражаемости въ конечномъ видѣ только въ томъ случаѣ, если будетъ указана высшая граница для числа членовъ періода или что то же, какъ легко видѣть, высшая граница для λ или, наконецъ, высшая граница для ρ числа операцій въ указанной выше *трансцендентной* методѣ.

Чтобы показать, какое значеніе имѣетъ упомянутая выше трансцендентная метода, ограничимся простѣйшимъ случаемъ тѣмъ случаемъ, когда k трансцендентное число или когда k зависитъ отъ одного параметра, который долженъ оставаться произвольнымъ.

Если $f(t, k^2)=0$ уравненіе, опредѣляющее $t=\frac{\beta-1}{\beta}$ въ k^2, то уравненіе это въ виду того, что

$$\frac{\beta-1}{\beta}=\operatorname{sn}^2\frac{\nu k+\nu' k' i}{\lambda},$$

имѣетъ корни общіе съ уравненіемъ

$$\varphi(t, k^2)=0$$

опредѣляющимъ $\operatorname{sn}^2\frac{\nu k+\nu' k' i}{\lambda}$, неприводимымъ въ области k^2 уравненіемъ.

Вытекающая отсюда дѣлимость $f(t, k^2)$ на $\varphi(t, k^2)$ дастъ неравенство, опредѣляющее высшую границу для λ.

И. П. Долбнѣ принадлежитъ разработка, согласно этимъ идеямъ, трансцендентной методы съ приложеніемъ Вейерштрассовыхъ функцій.

Трансцендентная метода Долбни [1]) отличается особой простотой и изяществомъ.

Она основывается на формулѣ:

$$\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt{X(x)}}=\frac{1}{m\sqrt{a_0}}\lg\left\{e^{mgu}\left[\frac{\sigma(u+\nu)}{\sigma(u)}\right]^m\right\} \tag{9}$$

гдѣ

$$X=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$$

$$G=H-\frac{a_1}{a_0}-\zeta(\nu)$$

$$x=-\frac{a_1}{a_0}+\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp'\nu}{\wp u-\wp\nu}$$

---

[1]) См. главнымъ образомъ работы $(5)_a$ (5_b).

$$\sqrt{X}=\sqrt{a_0}\,[\wp(u+\nu)-\wp u] \tag{10}$$

$$g_2=\frac{1}{a_0^2}\,[a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2]$$

$$g_3=\frac{1}{a_0^3}\,[a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3-a_3^2-a_1a_4]$$

Условія интегрируемости

$$\nu=-\frac{2\tilde{\omega}}{\lambda}\,,\quad G=\frac{2\tilde{\eta}}{\lambda} \tag{11}$$

гдѣ $2\tilde{\omega}$ періодъ $\wp u$, $2\tilde{\eta}\ldots\zeta(u)$.

Второе условіе даетъ выраженіе для H.

Первое же сводится къ слѣдующему:

при

$$x=-\frac{a_1}{a_0}+\zeta$$

$$X=a_0(\xi^4+6\alpha_2\xi^2+4\alpha_3\xi+\alpha_4)$$

Полагая

$$g_2=3\alpha_2^2+\alpha_4\,,\ g_3=\alpha_2\alpha_4-\alpha_2^3-\alpha_3^2$$

имѣемъ

$$-\alpha_2=\wp\nu\,,\quad \alpha_3=\wp'\nu$$

По формуламъ удвоенія аргумента составляемъ

$$\begin{matrix}\wp(\nu)\ \wp(2\nu)\ \wp(4\nu)\ldots\wp(2^i\nu)\ldots\\ \wp'(\nu)\ \wp'(2\nu)\ \wp'(4\nu)\ldots\wp'(2^i\nu)\ldots\end{matrix} \tag{12}$$

Условіемъ выражаемости въ конечномъ видѣ интеграла $\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt{X(x)}}$ будетъ періодичность этого двойного ряда (12), начиная съ нѣкотораго мѣста, или обращаемость всѣхъ членовъ съ нѣкотораго мѣста въ нули.

Для членовъ двойного ряда (12) И. П. находитъ простыя выраженія и показываетъ, какимъ образомъ вычислять эллиптическій интегралъ (1) въ случаѣ его выражаемости въ конечномъ видѣ, развивая методу, аналогичную выше изложенной для случая Якобіевскихъ функцій.

Конечно, И. П. ошибается, говоря о неприложимости этой методы для рѣшенія отрицательнаго отвѣта, т. е. къ рѣшенію вопроса о непринадлежности интеграла къ типу псевдо-эллиптическихъ интеграловъ (т.-е. къ разысканію дополненія къ методѣ Абеля). А. А. Марковъ [1]) съ успѣхомъ примѣнилъ трансцендентную методу, пользуясь функціями pu, σu къ разъисканію условій необходимыхъ, и достаточныхъ принадлежности интеграла

$$\int\frac{dx}{(x^3+c)\sqrt{x^3+d}}$$

къ типу псевдо-эллиптическихъ и послѣдняя работа можетъ служить образцомъ для восполненія работы Долбни, относящейся къ интеграламъ

$$\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

И. П. Долбня въ двухъ направленіяхъ продолжаетъ упомянутыя свои изслѣдованія.

1) отъ эллиптическаго интеграла (1) переходитъ къ биноминальному интегралу аналогичнаго типа.

2) отъ частнаго типа эллиптическаго интеграла (1) переходитъ къ общему

$$\int\frac{\varphi(x)dx}{\psi(x)\sqrt{R(x)}}\ ^{2)}.$$

Кривая [3])

$$y^4=(x-a)^2\ (x-b)^3\ (x-c)^3$$

---

[1]) *А. А. Марковъ.* О псевдоэллиптическихъ интегралахъ вида $\int\frac{dx}{(x^3+c)\sqrt{x^3+d}}$. Записки Акад. Н. за 1894.

[2]) Трансцендентная метода для общаго случая Абелевыхъ интеграловъ развита въ моемъ сочиненіи: „Объ опредѣленіи въ конечномъ видѣ Абелевыхъ интеграловъ“ Мат. Сб. 1906 годъ.

[3]) Раб. (9).

перваго рода и интегралъ

$$I = \int \frac{x+H}{y}\, dx \tag{13}$$

можно привести къ эллиптическому интегралу и задачу о выражаемости биноминальнаго интеграла (13) можно свести къ задачѣ объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ.

И. П. Долбня выбираетъ другой болѣе изящный путь, выражая интегралъ (13) съ помощью Вейерштрассовыхъ эллиптическихъ функцій, а именно взявъ для интеграла J трансцендентное выраженіе

$$J = \lg\, [(\wp z - \wp z_0)(\wp z - \wp z_0 i)^i] + \frac{2}{m} \lg \prod_{\rho=0}^{\rho=m-1} \{\wp[z + \rho z_0) - \wp z_0]\ [\wp(z + \\ + \rho z_0 i) - \rho z_0 i]^i\}^{\rho-1}$$

полагая

$$x - c = \frac{1}{6\wp^2 z - \beta}$$

$$g_2 = \frac{2(\beta - \alpha)}{3},\ g_3 = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{c-a},\ \beta = \frac{1}{c-b}.$$

Условіемъ выражаемости интеграла (13) въ конечномъ видѣ будетъ слѣдующее:

Полагая

$$g_2 = \frac{2(b-a)}{3(c-a)(c-b)}\ g_3 = 0$$

$$\wp z_0 = \frac{1}{\sqrt{6(c-b)}}$$

$$z_0 \equiv \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$ гдѣ m цѣлое число,

которое можетъ привести къ условію періодичности нѣкотораго двойного ряда.

И. П. изслѣдуетъ также и другіе биноминальные интегралы, напримѣръ,

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}} \quad {}^{1})$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+px+q}} \quad {}^{2})$$

для котораго получаетъ условіемъ періодичность ряда

$$\wp z_0 \ , \ \wp(2z_0)\ldots$$

$$\wp' z_0 \ , \ \wp'(2z_0)\ldots.$$

при

$$\wp z_0 = \frac{1}{\sqrt{6(a-b)}} \qquad \wp' z_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{3^2 a^2 (a-b)}}$$

$$g_2 = \frac{2b}{3a(a-b)} \ g_3 = 0.$$

Примѣняя трансцендентный методъ къ $\int \frac{\varphi(x)dx}{\psi(x)\sqrt{R(x)}}$, легко приходимъ къ хорошо извѣстнымъ результатамъ Абеля приводимости всякаго эллиптическаго интеграла къ типамъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \ , \int \frac{xdx}{\sqrt{R(x)}} \ , \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R(x)}} \ , \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}.$$

Указанная выше подстановка (10) приводитъ эллиптическій интегралъ къ интегралу раціональной функціи $\wp u$, $\wp' u$.

---

1) Раб. (9).
2) Раб. (11).

Представляя подынтегральную функцію въ нормѣ

$$D+\sum\Big[A\zeta(u-a)+A_1\wp(u-a)-\frac{A_2}{1.2}\wp'(u-a)+\ldots$$

$$\ldots\ldots(-1)^{\alpha-1}\frac{A_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\wp^{(\alpha-2)}(u-a)\Big]$$

получаемъ выраженіе этого интеграла черезъ $\wp$, ζ, σ.

И. П. доказываетъ, что интегралъ

$$I=\int\frac{\varphi(x)dx}{\psi(x)\sqrt{R(x)}}$$

сверхъ алгебраической части содержитъ еще члены

$$\sum_i l_i[\zeta(u+\nu+\omega_i)+\zeta(u-\omega_i)]+$$

$$+\sum_i k_i\lg\frac{\sigma(u+\nu+\omega_i)}{\sigma(u-\omega_i)}+mu$$

Условія принадлежности I къ типу псевдоэллиптическихъ:

1) $\sum l_i[\zeta(u+\nu+\omega_i)+\zeta(u-\omega_i)]=0$

2) $\nu\equiv\frac{2\bar{\omega}}{n}$ n цѣлое число.

Задача о приведеніи Абелева интеграла въ частномъ случаѣ биноминальнаго интеграла къ эллиптическому перваго рода сводится къ задачѣ о приведеніи съ помощью раціональной подстановки

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

т.-е. задачѣ, частнымъ случаемъ которой является преобразованіе эллиптическаго интеграла.

Общая идея изслѣдованній И. П., относящихся къ преобразованію эллиптическихъ интеграловъ и къ приведенію Абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ, состоитъ въ слѣдующемъ.

Полагая въ приведеніи Абелеваго интеграла къ эллиптическому

$$\int \frac{\omega(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{\Theta(y)dy}{\sqrt{O(y)}}$$

$y = \wp u$, получаемъ въ правой части нѣкоторую функцію $\wp u$, ζu, σu, разложеніе которой вблизи различныхъ значеній u легко изслѣдуется и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляется и разложеніе x.

Раціональныя функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть таковы, что уравненіе

$$\varphi(x) - \psi(x)\,\wp(u) = 0$$

должно давать разложеніе того же типа, что въ нѣкоторой мѣрѣ опредѣляется характеръ $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Разсматривая такимъ образомъ задачу о преобразованіи, т. е. о приведеніи типа

$$\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2 y - \bar{g}_3}}$$

съ помощью подстановки даннаго порядка, И. П. получаетъ сперва, полагая

$$y = \wp(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3) = \bar{\wp} u$$

$$x = \wp(u, g_2, g_3) = \wp u$$

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_1 = \frac{(x-\zeta_1)^2 (x-\zeta_2)^2 \ldots (x-\zeta_n)^2 (x-e_1)}{(x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2}$$

откуда усматривая, что ζ_0 значеніе x при которомъ $\overline{\wp u} = \overline{e_1}$ а x_1 значенія x, при которыхъ $\bar{\wp} u = \infty$, получаетъ формулу

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_1 = (\wp u - e_1) \prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\wp u - \wp\left(\frac{2k-1}{2n-1}\,\omega\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)} \right)^2$$

и изслѣдуетъ подробно преобразованіе 2-го и 4-го порядковъ

Та же общая идея лежитъ въ основѣ изслѣдованій И. П., относящихся по приведенію ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ. Эти изслѣдованія даютъ много любопытныхъ примѣровъ приведенія, пополняющихъ указанныя Серре, Деспара, Альта, Ринка, Симони и Келэ и представляется не лишеннымъ интереса сближеніе этихъ изслѣдованій съ изслѣдованіями Якоби, Эрмита, Гурса и моими.

Слѣдуетъ замѣтить, что И. П. Долбня въ противоположность упомянутымъ авторамъ занимается не только приведеніемъ къ эллиптическимъ интеграламъ перваго рода, но разсматриваетъ и случай интеграловъ 2-го рода [1]) и кромѣ того прилагаетъ свои методы къ вопросу о приведеніи биноминальныхъ интеграловъ къ эллиптическимъ.

Вопросъ о приведеніи Абелева интеграла $\int F(x, y)dx$ при всякой раціональной функціи F равносиленъ задачѣ о приведеніи рода (genre'a) кривой, опредѣляющей Абелевъ интегралъ къ единицѣ.

Биноминальные интегралы

$$\int F(x, \sqrt[m]{R})dx$$

$$R = G(x-a)^{\alpha} \; (x-b)^{\beta} \ldots$$

приводящіеся при всякой рац. ф. F къ эллиптическимъ интеграламъ это тѣ, для которыхъ родъ кривой

$$y^m = R(x) \tag{14}$$

равенъ $p=1$.

Подъ типъ такихъ интеграловъ подходятъ интегралы Лежандра.

$$\int F(x)\left(\sqrt[3]{R(x)}\right)^{\nu} dx,$$

гдѣ $R(x)$ цѣлая функція 3-ей степени, приводящіеся къ эллиптическимъ.

---

[1]) Раб. (29).

Задача объ опредѣленіи рода кривой (14) можно рѣшать на основаніи формулы, какъ это дѣлаютъ Аппель и Гурса.

Долбня предлагаетъ для этой цѣли особую графическую методу.

Къ вопросу объ опредѣленіи рода биноминальной кривой (или порядку биноминальнаго интеграла) И. П. не разъ возвращается.

Въ связи съ этимъ вопросомъ И. П. разсматривается вопросъ о приведеніи биноминальныхъ интеграловъ къ биноминальнымъ же низшихъ порядковъ.

Порядокъ биноминальнаго интеграла

$$\int\frac{dx}{y}$$

И. П. [1]) опредѣляетъ числомъ независимыхъ интеграловъ перваго рода типа

$$\int\frac{x^p(x-a)^{a_1}(x-b)^{b_1}\ldots(x-e)^{e_1}}{y}\,dx.$$

Среди этихъ интеграловъ И. П. различаетъ характеристичные и нехарактеристичные интегралы (т.-е. зависящіе отъ корня низшей чѣмъ степени).

Если существуетъ раціональная (но не бираціональная) подстановка, приводящая характеристичные биноминальные интегралы и не приводящая не характеристичные, то для биноминальныхъ интеграловъ мы получаемъ число независимыхъ интеграловъ 1-го рода, какъ разъ равное числу этихъ характеристичныхъ интеграловъ, т.-е. получаемъ приведеніе данныхъ биноминальныхъ интеграловъ къ биноминальнымъ интеграламъ низшаго порядка.

Нѣкоторыя изъ работъ И. П. Долбни имѣютъ значеніе исключительно методологическое, представляя новую обработку въ изложеніи уже извѣстныхъ результатовъ.

---

[1]) См. раб. (13).

Такова замѣтка о теоремѣ сложенія, выводимая изъ теоремы Абеля употребленіемъ кривой $y=\alpha x+\beta x^3$.

Сюда же относится и выводъ теоремы сложенія pu, указанный въ связи съ рѣшеніемъ задачъ о разысканіи мероморфныхъ функцій $\varphi(u)$, $\tau(u)$ удовлетворяющихъ функціональному уравненію

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u\tau^2 a}=\varphi(a)-\varphi(u).$$

Въ началѣ своей научной дѣятельности И. П. интересовался также рѣшеніемъ алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ. Этого рода изслѣдованія начинаются со статьи, содержащей ясный и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ упрощенный выводъ на основаніи Абель-Малстеновскихъ изслѣдованій формы корня метациклическаго уравненія простой степени и критеріума Галуа разрѣшимости въ радикалахъ, состоящаго въ томъ что черезъ два корня уравненія выражаются раціонально всѣ остальные.

Дальнѣйшія изслѣдованія приводятъ И. П. къ слѣдующему результату [1]). Если неприводимое уравненіе простой степени и съ цѣлыми коэффиціентами алгебраически разрѣшимо, то рѣшеніе его зависитъ отъ уравненія $\frac{n-1}{2}$-ой степени съ коэффиціентами формы $a+\sqrt{b}$, гдѣ a, b цѣлыя числа, при чемъ эти послѣднія могутъ быть опредѣлены конечнымъ числомъ операцій. Благодаря этой теоремѣ уравненіе 5-ой степени сводится къ квадратному, а 7-ой къ кубическому уравненію.

Въ заключеніе приводимъ списокъ научныхъ работъ покойнаго.

Списокъ печатныхъ работъ И. П. Долбни.

1) Sur le critère de Galois concernant la resolubilité des équations algébriques par radicaux. Nouvelles Annales (3) VII 467—485.

---

[1]) Раб. (10).

2) Новое доказательство Абелевской теоремы объ интегрированіи дифференціала формы $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$.

Собраніе протоколовъ засѣданій секціи Физико-Математ. Наукъ Общества Естествоиспытателей при Казанскомъ Университетѣ 1888 г. т. VI стр. 307—324.

1)b О критеріумѣ Галуа разрѣшимости уравненій въ радикалахъ. Соб. прот. з. с. Ф. М. Н. О. Е. при Каз. Унив. 1889.

3) Sur l'analogie entre les fonctions elliptiques et trigonometriques. Nouv. Ann (3) VIII. 459—471.

4) Sur l'addition des intégrales elliptiques 1, 2, 3 espèce. Nouv. Ann. (3) VIII. 204—213.

$5)_a$ Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel. 1890. Journal de Liouville, (4) VI. 293—311.

$5)_b$ Объ Абелевыхъ псевдо-эллиптическихъ интегралахъ. Соб. Прот. О. Е. при Каз. Ун. VIII за 1890. 252—277.

6) Sur le développement de $\sqrt{R}$ en fonction continue. 1891. Nouv. Ann. (3) X. 134—140.

7) Интегрированіе съ помощью эллиптическихъ функцій. Изв. Каз. Мат. Об. (2) I. 46—73.

8) Remarques sur la théorie des fonctions abéliennes. 1891. Nouv. Ann. (3) X. 478—502.

9) Sur les intégrales pseudo-elliptiques dépendant des radicaux du quatrième et sixième degré 1893. Darboux Bulletin (2) XVII.

$10)_a$ О формѣ корней разрѣшимаго алгебраическаго уравненія простой степени. Математическій Сборникъ за 1895 г. (4) XVII. 801—819.

$10)_b$ Sur la résolution algébrique des équations de degré premier. Darboux Bull. (2) XIX 27—37.

$11)_a$ Sur l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+px+q}}$.

Darb. Bull. (2) XIX 76—84.

12) Sur la détermination du degré d'une certaine catégorie

d'intégrales abéliennes et quelques applications. Darb. Bull. (2) XIX. 272—281.

13)a О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ корней биноминальнаго уравненія, 1895. Мат. Сб. 18 647—689.

11)$_b$ О логариѳмическомъ выраженіи интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+px+q}}$ 1896. Мат. Сб. 18. 108—121.

14) Новый случай выражаемости интеграла въ логариѳмахъ, 1896. Мат. Сб. 18. 150—160.

15) Изслѣдованія изъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Дисс. 1896.

15)$_b$ Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binôme. Darb. Bull. (2) XX.

16) *Замѣтка* по Теоретической Ариѳметикѣ Педаг. Сб. № 12. 562—564.

17) Remarque sur le genre des intégrales abéliennes. Darb. Bull. (2) XXI 243—244.

18)$_a$ Etude directe des intégrales abéliennes du genre 1. 1898. Annales de l'Ecole Normale. (3) 15. 393—430.

19) Обращеніе Абелевыхъ интеграловъ 1-го рода. Протоколы Съѣзда Естеств. X за 1898. Стр. 140, 227.

20) Вычисленіе поверхностей и объемовъ съ помощью введенія произвольныхъ параметровъ. Извѣстія Петерб. Біологической Лабораторіи. 5. № 2 стр. 25—34.

21) Опредѣленіе предѣловъ кратныхъ интеграловъ. Изв. П. Б. Л. 1901. № 1. 22—26.

22) Изслѣдованіе гипергеометрическихъ дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ періоды ω, η эллиптическихъ функцій. Изв. П. Б. Л. 1901.

23) О геометрическомъ приложеніи псевдо-эллиптическихъ интеграловъ. Труды Физ. Отд. Мос. Об. Ест. 1901. т. XI.

24) Sur un cas de reductibilité des intégrales abéliennes 1901. Darb. Bull. (2) 25. 114—116.

24)e Изслѣдованіе Абелевыхъ интеграловъ рода 1-го, зависящихъ отъ биноминальныхъ уравненій. Изв. Пет. Біол. Лаб. № 2.

25) Объ одномъ случаѣ приведенія Абелевыхъ интеграловъ рода $p>2$. Труды Мос. Об. Ест. 1901 т. X № 2. 17—26.

26) О нѣкоторыхъ геометрическихъ приложеніяхъ псевдоэллиптическихъ интеграловъ. 1902. Труды Мос. Об. Ест. XI № 1. 20—23.

27) Sur quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions élliptiques. 1903. Darboux Bull. (2) XXVII.

28) О нѣкоторыхъ вопросахъ, относящихся къ теоріи эллиптическихъ функцій. 1903. Изв. Пет. Біол. Лаб. VII № 1. 5—33.

29)$_a$ Recherche analytique sur la réduction des intégrales abéliennes. 1903. Darb. Bull. (2) 27. 144—161.

29)$_b$ Аналитическія изслѣдованія о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ. 1903. Изв. Пет. Біол. Лаб. VI № 4. 6—29.

30) Элементарныя методы вычисленія псевдо-эллиптическихъ интеграловъ 1903. Изв. Пет. Біол. Лаб. VI № 3. 18—24.

31) Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et la théorie analytique de la resoution des intégrales abéliennes. 1904. Darb. Bull. XXVIII. 210—232.

32) Sur la théorie de la transformation der fonctions elliptiques. 1905. Darb. Bull. (2) XXIX 203—214.

33) Remarques sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des intégrales abéliennes. 1906. Darb. Bull. (2) XXX 207—224.

34) Quelques nouvelles remarques sur la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des intégrales abéliennes. 1907. Darb. Bull. (2) XXXI. 217—231.

35) О преобразованіи эллиптическихъ интеграловъ. Извѣстія Горнаго Института 1909. стр. 169—170.

36) Объ одномъ приложеніи теоріи исключенія категоріи Абелевыхъ интеграловъ. Изв. Горн. Инст. 1909. стр. 263—271.